TD 13 : Suites Indications

Généralités (pratique)

1 ★★☆ (*Sens de variation*) Étudier la monotonie éventuelle (en précisant si elle est stricte) des suites de termes généraux suivants :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad b_n = \frac{2+(-1)^n}{3^n} \qquad c_n = \frac{n^n}{n!}$$

Utiliser les différentes caractérisations de la monotonie vues en cours.

2 ★★☆ (*Calcul de limite*) Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite des suites de termes généraux suivants :

1) $u_n = n^2 \arccos\left(\frac{1}{n}\right)$
2) $u_n = \frac{3+5n-2n^3}{-5n^3+\cos n}$
3) $u_n = \frac{(2+\cos n)^n}{4^n}$
4) $u_n = \ln(n+1) - \ln n$
5) $u_n = \frac{e^n}{n \ln n}$
6) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
7) $u_n = (3+\sin n)^{\frac{1}{n}}$
8) $u_n = \sqrt{n^2+1} - 2n$
9) $u_n = n^{\frac{1}{n}}$
10) $u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$

3 ★★☆ Étudier la nature de la suite de terme général

$$u_n = \left\lfloor 3 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor$$

Calculer quelques termes pour conclure et trouver une idée de preuve.

4 ★★☆ (*Série harmonique*)

1) Montrer que : $\forall x \geq 0 \quad \ln(1+x) \leq x$
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
3) En déduire la nature de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$
2) Appliquer le résultat précédent à $x = \frac{1}{k}$, pour k allant de 1 à n.

5 ★★

1) Montrer que : $\forall x \geq 0 \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2) En déduire la limite de $u_n = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$, où α est un réel fixé.

1) Faire une étude de fonction pour chaque inégalité.
2) Passer par la forme exponentielle.

6 ★★★ Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.
Pour n très très grand, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}} + \ldots + \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{1}$$

Cela donne l'intuition que la limite serait 2... Mais on ne peut pas simplement passer à la limite dans cette égalité, car le nombre de la termes du second membre augmente avec n. Pour conclure, il faut donc montrer d'une autre manière que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Généralités (théorie)

7 ★★ Vrai ou faux ? Justifier.

1) Toute suite croissante admet une limite (finie ou non).
2) Toute suite décroissante est majorée.
3) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $|u_n| \to \ell$, alors $u_n \to \ell$ ou $u_n \to -\ell$.
4) Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
5) La somme de deux suites convergentes est convergente.

6) La somme de deux suites divergentes est divergente.

7) La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

8 ★★ Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. Déterminer un rang N, pas forcément le meilleur, à partir duquel :

1) $\dfrac{1}{\sqrt{n}+1} < \varepsilon$

2) $\dfrac{n}{n^2+1} < \varepsilon$

3) $\sqrt{n^2-n} > A$

4) $3^n - 2^n > A$

Mimer la méthode vue en cours : il faut reformuler l'équation en considérant ε comme un paramètre et n l'inconnue. Dans chaque cas, trouver une condition suffisante sur n de la forme $n \geq \text{qqch}(\varepsilon)$ pour laquelle l'équation est vérifiée.

9 ★★ En utilisant la définition de la limite, montrer que :

1) $\dfrac{1}{n^2+1}$ tend vers 0.

2) $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ tend vers $+\infty$.

3) $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$ tend vers 1.

4) $2n - n^2$ tend vers $-\infty$.

Suivre la méthode vue dans les exemples du cours.

10 ★★ Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers un réel ℓ fixé.

1) On suppose $\ell < 1$. Montrer que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. Quelle est sa nature ?

2) On suppose $\ell > 1$. Montrer que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang. Quelle est sa nature ?

3) Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

4) Application : déterminer les limites de $u_n = \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n!}$ et de $v_n = \dfrac{n^n}{n!}$. On admet que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e$.

Il faut exploiter la définition de la limite.

11 ★★☆ Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire.
Un sens est évident. Pour l'autre, en appelant $\ell = \lim u_n$, on remarquera qu'on ne peut pas assurer, a priori, que $\ell \in \mathbb{Z}$. On peut donc montrer que $\ell \in \mathbb{Z}$ en raisonnant par l'absurde : il faut utiliser la définition de la convergence, avec .

12 ★★★ (**Moyenne de Césaro**) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

1) On suppose que $u_n \to 0$. Montrer que $v_n \to 0$. Indication : pour tous entiers naturels $n \geq N$

$$|v_n| \leq \left|\frac{u_1+\cdots+u_N}{n}\right| + \left|\frac{u_{N+1}+\cdots+u_n}{n}\right|$$

2) En déduire que si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $v_n \to \ell \in \mathbb{R}$.

3) Donner un exemple de suite (u_n) telle que la suite (v_n) ci-dessus converge, mais pas (u_n).

4) Montrer que si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.

1) Il faut sortir les ε ! Écrivez les définitions de $u_n \to 0$ (ce qu'on sait) et $v_n \to 0$ (ce qu'on veut montrer). Utiliser l'indication et majorer chaque terme par du membre de droite par $\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour avoir $|v_n| \leq \varepsilon$.

2) Poser $U_n = u_n - \ell$ et $V_n = v_n - \ell$.

3) La réponse est non ! Chercher un exemple de suite (u_n) qui n'admet pas de limite et regarder sa moyenne de Césaro... Avec un peu de chance...

4) Il faut à nouveau utiliser la définition.

Suites implicites

13 ★★☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$(E_n) : \quad x + \tan x = n$$

1) Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution x_n.

2) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

1) Tracer un tableau de variations et utiliser le TVI.

2) Étudier le sens de variations de (x_n).

14 ★★★ Étudier la nature de la suite (u_n) où u_n est la n–ième décimale de $\sqrt{2}$.
Si cette suite était convergente, elle serait stationnaire par l'exercice 11...

Suites extraites, adjacentes, etc.

15 ★ Montrer que la suite de terme général $u_n = e^{(-1)^n n}$ est divergente.
Le $(-1)^n$ nous appelle à introduire des sous-suites !

16 ★★ Montrer que les suites de termes généraux suivants convergent :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

17 ★★ On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge.
L'adjacence de (S_{2n}) et (S_{2n+1}) est une vérification classique mais il faut être précis !

18 ★★ Soit (z_n) une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\overline{z}_n)$. Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.
Étudier les suites de terme général $\operatorname{Re} z_n$ et $\operatorname{Im} z_n$.

19 ★★ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
Passer par les complexes.

20 ★★★ Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que (u_n) est convergente.
Étudier la suite (u_{6n}) pour en déduire que $\lim u_{2n} = \lim u_{3n}$.

21 ★★★ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{3n} \to 0$.

1) Montrer que si α est une valeur d'adhérence de (u_n), alors -2α aussi.

2) On suppose que (u_n) converge. Déterminer sa limite.

3) Montrer que (u_n) converge.

1) Si $u_{\varphi(n)} \to \alpha$, que dire de la sous-suite $(u_{3\varphi(n)})$?

2) Si (u_n) converge, elle ne peut avoir qu'une seule valeur d'adhérence.

3) Par Bolzano-Weierstrass, (u_n) admet une valeur d'adhérence α. En utilisant la question 1 et le caractère borné de (u_n), montrer que $\alpha = 0$. Ainsi, (u_n) admet une unique valeur d'adhérence. Pour montrer que (u_n) converge vers 0, il faut nier la définition de "$u_n \to 0$" et montrer que cela conduirait à l'existence d'une autre valeur d'adhérence non nulle.

22 ★★★ Montrer qu'une suite (u_n) est non majorée si et seulement s'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $+\infty$.
Utiliser la définition de (u_n) est non majorée : $\forall M \in \mathbb{R}$... et utiliser différentes valeurs de M pour construire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ en construisant les valeurs de $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, etc. à chaque terme.

Suites récurrentes

23 ★ Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1$

C'est du cours.

24 ★★ On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = (n+1)u_n + (n+1)!$$

Calculer u_n. On pourra poser $v_n = \frac{u_n}{n!}$.

Réécrire la relation de récurrence avec uniquement la suite (v_n).

25 ★★ (*Suites récurrentes doubles*) Déterminer le terme général des suites (u_n) définies par

1) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
2) $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$
3) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
4) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = e^{i\frac{\pi}{4}}u_{n+1} + 2iu_n$

C'est du cours.

26 ★★ Déterminer la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

On pourra poser $v_n = u_n - 2$.

Réécrire ces relations avec uniquement la suite (v_n).

27 ★★ On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = \frac{1}{2}$, $v_0 = \frac{1}{3}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 v_n \\ v_{n+1} = u_n v_n^2 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n, v_n \in \left]0, 1\right[$.
2) En déduire le sens de variation de (u_n) et (v_n), et déterminer leur limite.

1) Qui dit relation de récurrence, dit récurrence.
2) La stricte positivité de (u_n) et (v_n) permet d'utiliser une méthode bien précise pour étudier les variations de ces deux suites.

28 ★★★ (*Suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$*) Étudier les suites (u_n) définies par

1) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$
2) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \arctan(u_n)$
3) $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = e^{u_n} - 1$
4) $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2$ (on discutera selon la valeur de u_0).

Appliquer la méthode du cours !

29 ★★★ On cherche toutes les suites réelles (u_n) vérifiant (E) : $u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 3^{n^2}$.

1) Soit (u_n) une solution. On note $C = u_0 \in \mathbb{R}$ le premier terme de la suite. Exprimer u_1, u_2, u_3 en fonction de C.
2) En déduire toutes les suites solutions de l'équation homogène (E_H) : $u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 0$ et les exprimer en fonction de $C = u_0$.
3) Déterminer une solution particulière de (E). On appliquera la méthode de la variation de la constante : on remplace C par C_n dans la solution de (E_H), puis on injecte cette expression dans (E), et enfin on trouve une suite (C_n) qui convient.
4) En déduire les solutions de (E).

Pour la 2, il faut conjecturer une relation de récurrence et la démontrer rigoureusement.
Pour la 4, il faut a priori justifier que toute solution de (E) s'écrit comme la somme de la solution particulière trouvée et d'une solution générale de (E_H). La preuve est similaire à celle des ED.